关于运动物体的电动力学

爱因斯坦

根据英文译本翻译[1]

大家都知道，麦克斯韦的电动力学，就目前通常的理解来说，当应用于运动物体的时候，会导致不对称性，而这种不对称似乎并不是现象本身所固有的特性。让我们用一个磁铁和导体之间电磁互动的例子来说明。这里的观测结果仅取决于导体和磁铁之间的相对运动，然而对该现象的解释则把究竟是哪个在动完全区别开来。如果是磁铁在动而导体不动，在磁铁的周围就会形成一个电场，它的能量会在附近的导体上产生电流。然而，如果是导体在动而磁铁不动，在磁铁周围并不产生电场。不过在导体中会出现一种电动力，该电动力并没有对应的能量，但是却会产生同样方向和强度的电流－假设两种情况下的相对运动相同。

诸如此类的例子，再加上在探测地球相对于“光介质”的相对运动方面的不成功的尝试，都暗示着电动力学和机械运动现象，都不存在对应于绝对静止的属性。它们都意味着，就像在一阶小量已经显示的那样，同样的电动力学和光学定律在不同的参照系中都同样适用，就像机械运动公式表现得那样。我们会把这一猜想（其宗旨在后面会被称为“相对性原则”）提升为公理，并引进另一个与其明显矛盾的公理，也就是，光总是在空间中以一个确定的速度 c 传播，而不受光源运动的影响。这两个公理足以让我们根据麦克斯韦的关于静止物体的理论，得出一个简单而又一致的关于运动物体的电动力学理论。引进“发光以太”会被证明是多余的，因为这里得出的观点并不需要一个“绝对静止的空间”来提供特别属性，也不会在电磁现象发生的空间里设一个速度矢量。

就像所有电动力学那样，这里要推导的理论也是基于刚体运动学的，因为任何类似理论的论断都是关于刚体（坐标系），时钟，和电动力学过程之间的关系的。对这种情况的考虑不足，是目前关于运动物体的电动力学的困难的根本所在。

一、运动学部分

第一节、同时性的定义

让我们选取一个坐标系，在其中牛顿力学定律成立。为了让我们的陈述更精确，也从文字上区别于后面将引进的其它坐标系，我们把它称作是“静止坐标系”。

如果一个质点相对于这个坐标系处于静止状态，它的位置就可以用量尺和欧几里得几何的办法来定义，并表示为笛卡尔坐标。

如果我们要描述一个质点的运动，我们会把它的坐标表述为时间的函数。现在我们心里必须牢记，这样的数学描述并没有物理意义，除非我们非常清楚究竟什么是时间。我们必须考虑到，我们所有和时间有关的判断总是关于同时性事件的判断。比如，如果我说“火车 7 点钟到达”，我的意思是说：“我手表的时针指向 7 和火车的到达是同时性事件”。

似乎通过把“时间”替换为“我手表的短针的位置”，可以克服关于时间定义上的所有困难。事实上，当我们仅仅关心一个手表所在位置的时间的时候，这样的定义是令人满意的；但如果我们要把一系列发生在不同地点的事件用时间联系起来的时候，或者等价地说，当我们要确定发生在手表远处的事件的时间的时候，这样的定义就不能令人满意了。

当然，我们或许可以满足于一个在坐标原点的观察者和手表所确定的时间，假如每个事件发生时，都会有一束光信号发出，该信号通过空间到达该观察者时，他就能够确定表的指针位置。但这种协调办法有一个缺点，就是它不能不受观察者手表或时钟所在位置的影响，正像经验告诉我们的那样。顺着以下的思路，我们能得到一个更实用的用来确定时间的办法。

如果在空间的 A 点有一个时钟，那么一个在 A 点的观察者，通过观测在事件发生时的指针的位置，可以确定在 A 点附近的事件发生的时间。如果在 B 点有一个同样的时钟，那么一个在 B 点的观察者可以同样确定在 B 点附近的事件发生的时间。但是如果没有其他假定的话，就时间来说，我们无法对在 A 点和 B 点所发生的事件进行比较。即今为止，我们只定义了“A 时间”和“B 时间”。我们还没有为 A 和 B 定义一个共同的“时间”，因为这个共同的时间根本就无法定义，除非我们定义光从 A 传到 B 的“时间”等于光从 B 传到 A 的“时间”。假设一束光从“A 时间”的 t_A 从 A 传向 B，在“B 时间”的 t_B 到达 B，然后马上反射回 A，并在“A 时间”的 t'_A 到达 A。

根据定义，如果 $t_B - t_A = t'_A - t_B$，那么这两个时钟同步。

我们假定这个同步性的定义不会自相矛盾，并适用于多点；并且以下的关系普遍适用：

1. 如果在 B 点的时钟与 A 点的时钟同步，那么在 A 点的时钟也与 B 点的时钟同步。
2. 如果在 A 点的时钟与在 B 点和 C 点的时钟都同步，那么在 B 点的时钟与 C 点的时钟也相互同步。

这样，借助于想像中的物理实验，我们知道了怎么去理解不同地点的时钟同步概念，并获得了关于“同时的”，“同步的”和“时间”的定义。一个事件发生的“时间”，是一个在事件发生地的一个静止时钟所给出的与事件具有同时性的时间，该时钟在确定任何时间的时候，都与某一特定的时钟完全同步。

根据经验，我们进一步假定，以下数值

$$\frac{2AB}{t'_A - t_A} = c$$

是一个通用常数，也就是光在空间的传播速度。

关键是要用静止系统中的静止时钟来定义时间，让我们把该适用于静止系统的时间称作是“静止系统中的时间”。

第二节、关于长度和时间的相对性

下面的想法基于相对性原则和光速恒定性原则。我们把这两个原则定义如下：

1. 不管用两个直线匀速运动的参照系中的哪一个来描述其状态变化，一个物理系统状态变化所遵守的定律都不会受到影响。
2. 不管是由静止的还是运动的物体发出，任何一束光在一个“静止”参照系中都按照确定的速度 c 传播。因而

$$速度 = \frac{光传播的距离}{时间间隔}$$

其中的时间间隔应该用第一节中的定义来理解。

假设有一个静止的刚性杆，用一个静止的量杆来量，它的长度是 l。我们现在想像该刚性杆的轴心就在静止坐标系的 x 轴上，并在 x 增加的方向上给它施加一个速度为 v 的匀速平行变换。我们现在想知道该移动杆的长度，并想像有以下两种方法可用：

(a) 测量者与量杆和被测量的杆一起运动，就像当这三个都在静止状态那样，用量杆直接去量。

(b) 利用静止坐标系里的静止时钟，并对其按第一节的方法进行同步，测量者可以确定被测量的杆的两端在某一特定时间在静止坐标系中的位置。这两点之间的距离（用静止的量杆来量）也是一个长度，我们可以把它指定为"杆的长度"。

根据相对性原则，方法(a)所得到的长度（我们把它称作是"杆在运动系统中的长度"），一定等于静止的杆的长度 l。

方法(b)所得到的长度，我们把它称作是"（移动）杆在静止系统中的长度"。我们会用我们的两个原则来确定该长度，并会发现它不同于 l。

现在的运动学隐含地假定这两种方法得出的长度完全相同，或换句话说，一个运动刚体在某一时刻 t 的几何特性可以用其在静止状态和某一确定位置的状态来完全代表。

我们进一步想像，在杆的两端 A 和 B 各有一个时钟，它们和静止系统的时钟完全同步。也就是说，它们的读数都是在某一时刻其当时所处位置的"静止系统时间"。因此这些时钟"是在静止系统中同步的"。

我们再进一步想像，在每个时钟那儿，都有一个移动观测者，并且这两个人用第一节所确定的方法来对这两个时钟进行同步。让一束光在时刻 t_A 从 A 发出，在时刻 t_B 从 B 反射回来，并在时间 t'_A 返回 A。考虑到光速恒定性原则，我们发现

$$t_B - t_A = \frac{r_{AB}}{c-v} \quad \text{和} \quad t'_A - t_B = \frac{r_{AB}}{c+v}$$

这里 r_{AB} 是在静止系统中测得的移动杆的长度。与移动杆一起移动的观测者会发现这两个时钟不同步，然而静止系统中的观测者则认为它们是同步的。

由此可见，对于同时性，我们不能赋予绝对的重要性。两个在某一系统中被认为是同时发生的事件，当从一个与其做相对运动的系统中观测时，就不再是同时发生了。

第三节、从一个静止系统到另一个相对于它做直线匀速运动的系统的坐标和时间变换理论

让我们在一个静止的空间里选取两个坐标系，也就是分别由三个从同一个点出发，并相互垂直的直线所构成的系统。假设这两个系统的 X 轴重合，它们的 Y 轴和 Z 轴则相互平行。再假设每个系统都有一个刚性量杆和几个时钟，并假设这两个量杆完全相同，这些时钟也完全相同。

现在对其中一个系统 k 的原点，在相对于另一个系统 K 的 x 增加的方向上，施加一个速度为 v 的恒速运动，并且这个速度会同样地传递到它的坐标轴、量杆和时钟上。在静止系统 K 的任一时刻，运动系统的坐标轴都会有一个对应的位置。由于对称性的原因，我们可以假定，在（任何）时刻 t（这个 t 总是代表静止系统的时间），运动系统的坐标轴总是平行于静止系统的坐标轴。

我们现在想像在静止系统 K 中的空间用其静止的量杆来测量，在运动系统 k 中的空间用与其一起移动的量杆来量，并由此得到两套坐标值 x，y，z 和 ξ，η，ζ。进一步，假设静止系统的时间 t 都由其测量点处的时钟按照第一节所讲的光信号的方式给出；同样，运动系统的时间 τ 都由其中的相对静止的时钟，按第一节的方法给出。

对于可以完全定义静态系统里某一事件的地点和时间的一组 x，y，z，t, 在运动系统 k 中总是存在可以完全定义该事件的一组 ξ，η，ζ，τ。我们的任务就是找出确定它们之间关系的公式。

首先，根据我们所认为的空间和时间的均匀性，很明显这些公式必须是线性的。

如果我们选取在系统 k 中静止的一点 $x'=x-vt$，其坐标 x'，y，z 就肯定不会受时间影响。我们首先把 τ 定义 x'，y，z 和 t 的函数。为此，我们无非就是在公式中把 τ 表示为系统 k 中的静止时钟的数据之和，而这些时钟都是按照第一节的规则同步过了的。

从系统 k 的原点，一束光在时刻 τ_0 沿着 X 轴的方向发射向 x'，并在时刻 τ_1 被反射回来，并在时刻 τ_2 返回原点。那么我们就肯定会有 $\frac{1}{2}(\tau_0+\tau_2)=\tau_1$，或者，通过把 τ 的函数形式代入，并应用光速在静止系统中是常数的原则，就可以得到：

$$\frac{1}{2}\left[\tau(0,0,0,t)+\tau\left(0,0,0,t+\frac{x'}{c-v}+\frac{x'}{c+v}\right)\right]=\tau\left(x',0,0,t+\frac{x'}{c-v}\right)$$

如果把 x' 选得无限小，就能得出：

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{c-v}+\frac{1}{c+v}\right)\frac{\partial\tau}{\partial t}=\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{1}{c-v}\frac{\partial\tau}{\partial t}$$

或改写为：

$$\frac{\partial\tau}{\partial x'}+\frac{v}{c^2-v^2}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0$$

应该注意，以上的光束可以不从原点发出，而是从任何其它一点发出。所以我们的上述公式对所有的 x'，y，z 都成立。

把一个相似的考虑应用到 Y 和 Z 轴上，如果从静止系统看，光总是沿着这两个轴的方向以速度 $\sqrt{c^2-v^2}$ 传播，于是我们可以得到

$$\frac{\partial\tau}{\partial y}=0 \quad \text{和} \quad \frac{\partial\tau}{\partial z}=0\text{。}$$

因为 τ 是一个线性函数，从这些公式可以得出

$$\tau=a\left(t-\frac{v}{c^2-v^2}x'\right)$$

这里 a 是一个目前还未知的函数 $\phi(v)$， 并且为了简便起见，我们假定在系统 k 的原点，当 $t=0$ 时，$\tau=0$。

借助于这个结果，我们可以容易地确定 ξ，η，ζ 的值。根据光速恒定性原则和相对性原则，光在运动系统中的传播速度也是 c。对于一束在时刻 $\tau=0$ 沿 ξ 增加的方向发出的光，

$$\xi = c\tau \quad \text{或者，} \quad \xi = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right)。$$

但是从静止系统看，相对于系统 k 的原点，该束光的移动速度是 $c - v$，也就是

$$\frac{x'}{c - v} = t$$

如果我们把这个 t 代入 ξ 的公式，我们可以得到

$$\xi = a\frac{c^2}{c^2 - v^2}x'$$

用类似的方法，考虑光束沿着其它两个轴移动的情况，我们可以得出

$$\eta = c\tau = ac\left(t - \frac{v}{c^2 - v^2}x'\right)$$

因为

$$\frac{y}{\sqrt{\left(c^2 - v^2\right)}} = t \text{，} \quad x' = 0$$

所以

$$\eta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}y \text{，} \quad \zeta = a\frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}z$$

把 x'的值代入，我们得到

$$\tau = \phi(v)\beta\left(t - vx/c^2\right)$$

$$\xi = \phi(v)\beta(x - vt)$$

$$\eta = \phi(v)y$$

$$\zeta = \phi(v)z$$

其中，

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - v^2/c^2\right)}}$$

而 Φ是一个目前还未知的关于 v 的函数。如果对于运动系统的原点和 τ 的零点不做任何假设的话，以上这些公式的右端都要加上一个常数。

我们现在得证明，任何一束光，在运动系统中测量，其传播速度仍然是 c，就像我们所认为的在静止系统所发生的那样；因为我们还没有证明，光速的恒定性原则和相对性原则相匹配。

在时刻 $t = \tau = 0$，当两个系统的原点重合的时候，假设一球星光波从该点发出，并以速度 c

在系统 K 中传播。如果（x,y,z）是该束光所到达的某一点，那么

$$x^2+y^2+z^2=c^2t^2$$

利用我们的变换公式，通过一个简单的计算，我们可以得到

$$\xi^2+\eta^2+\zeta^2=c^2\tau^2$$

所以运动系统中看来，该波仍是传播速度为 c 的球形波。这说明我们的两个原则是兼容的。

在上述的变换公式中，还有一个未知的关于 v 的函数 Φ，现在我们来确定它。

为此，我们引进第三个坐标系 K'，它相对于系统 k 在做一个平行于 X 轴的位移，这使得系统 k 的原点以速度-v 在其 X 轴方向移动。假设在时刻 $t=0$，三个坐标系的原点都重合，并且在 $t=x=y=z=0$ 的时刻，系统 K'的时间 $t'=0$。我们把系统 K'中的坐标叫做 x',y',z'，那么通过双重利用我们的转换公式，我们可以得到

$$t'=\phi(-v)\beta(-v)\left(\tau+v\xi/c^2\right)=\phi(v)\phi(-v)t$$

$$x'=\phi(-v)\beta(-v)(\xi+v\tau)=\phi(v)\phi(-v)x$$

$$y'=\phi(-v)\eta=\phi(v)\phi(-v)y$$

$$z'=\phi(-v)\zeta=\phi(v)\phi(-v)z$$

因为 x',y',z'和 x,y,z 之间的关系不包含时间 t，所以系统 K 和 K'相对静止，很明显从 K 到 K'的变换必须是等同变换，于是

$$\phi(v)\phi(-v)=1$$

我们现在来求 $\phi(v)$ 的值。我们来看系统 k 在 Y 轴上的一段，该段介于 $\xi=0, \eta=0, \zeta=0$ 和 $\xi=0, \eta=l, \zeta=0$ 之间。这一段 Y 轴垂直于系统 K，并以速度 v 移动。它的两端在系统 K 中的坐标分别是

$$x_1=vt, y_1=\frac{l}{\phi(v)}, z_1=0$$

和

$$x_2=vt, y_2=0, z_2=0$$

所以，该段在系统 K 中的测得的长度是 $l/\phi(v)$，这就告诉了我们 $\phi(v)$ 的意义。根据对称性，很明显，在静止系统中，一个垂直于其轴运动的杆的长度，只取决于它的速度，而与它的运动方向无关。如果把 v 和-v 互换，该移动杆在静止系统测得的长度不变。于是我们可以得出

$$l/\phi(v)=l/\phi(-v)\text{，也就是，}\phi(v)=\phi(-v)$$

从该关系，再加上前面确定的关系，可以得出 $\phi(v)=1$，前面得出的变换公式就成为

$$\tau = \beta\left(t - vx / c^2\right)$$

$$\xi = \beta\left(x - vt\right)$$

$$\eta = y$$

$$\zeta = z$$

其中，

$$\beta = 1/\sqrt{\left(1 - v^2 / c^2\right)}$$

第四节、关于运动坐标系和运动时钟的公式的物理意义

我们想像有一个半径为 R 的刚性球，它相对于运动系统 k 静止，其球心在坐标系 k 的原点。这个以速度 v 相对于静止系统 K 移动的球体表面的公式是

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = R^2$$

这个公式用在 $t=0$ 时的 x,y,z 表示就是

$$\frac{x^2}{\left(\sqrt{\left(1 - v^2 / c^2\right)}\right)^2} + y^2 + z^2 = R^2$$

一个在静止状态下具有球体形状的刚体，在运动状态下，(当从静止系统看的时候)，表现为一个椭球体，其半轴分别为

$$R\sqrt{\left(1 - v^2 / c^2\right)}，R，R。$$

因此，尽管该球体（或者是任意其它形状的刚体）在 Y 轴和 Z 轴的尺寸上不受运动的影响，但它在 X 轴方向上的尺寸却按比例 $1:\sqrt{\left(1 - v^2 / c^2\right)}$ 缩小了。也就是，v 越大，缩短越多。对当 $v=c$ 的时候，所有的运动物体，当从静止系统看的时候，都变成了平面图形。当速度大于光速的时候，我们的考虑就没有意义了。但是在后面，我们会发现在我们的理论里，光速扮演着物理上的无穷大速度的角色。

很明显，同样的结论同样适用于从运动系统观测一个相对于“静止”系统静止的物体。

进一步，我们想像有一些时钟，在相对于静止系统静止的时候，它们能够指示（静止系统的）时间 t；在相对于运动系统静止的时候，它们能够指示（运动系统的）时间 τ。现在把其中的一个时钟放到坐标系 k 的原点上，并把它调整好用来指示时间 τ。如果从静止系统看，该时钟的运行速率是多少？

在代表时钟的 x,t 和 τ 之间，很明显 $x=vt$, 并且

$$\tau = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - v^2 / c^2\right)}}\left(t - vx / c^2\right)$$

于是，

$$\tau = t\sqrt{\left(1 - v^2 / c^2\right)} = t - \left(1 - \sqrt{\left(1 - v^2 / c^2\right)}\right)t$$

由此可以得出，在从静止系统看的时候，该时钟所指示的时间每秒慢 $1 - \sqrt{\left(1 - v^2 / c^2\right)}$ 秒，或

者，如果忽略四阶和更高阶的误差，会慢$\frac{1}{2}v^2/c^2$秒。

由此会引起以下特殊效果。如果在系统 K 中的 A 点和 B 点有两个静止时钟，它们在从静止系统看的时候是同步的。如果让 A 点的时钟以速度 v 沿直线向 B 点运动，当其到达 B 点的时候，这两个时钟就不同步了。从 A 点移动到 B 点的时钟会比一直呆在 B 点的时钟慢$\frac{1}{2}tv^2/c^2$（忽略四节及以上的误差），其中 t 代表从从 A 到 B 的旅程所需的时间。

很明显，如果时钟沿任何多边形线从 A 移动到 B，或者如果 A 和 B 重合，该结论也成立。

如果我们假定关于多边形线的结论也适应于一个连续的曲线，我们就会得出这样的结果：如果在A点的两个同步时钟的一个沿着一个封闭的曲线以恒定速度运行，当它返回A点的时候，该移动时钟会慢$\frac{1}{2}tv^2/c^2$秒，这里 t 是旅程所用的时间。因此我们可以得出结论，对于一个平衡时钟，假如其它情况都相同,它在赤道的时候一定会比它在两极的时候走得要慢。

第五节、速度合成

在沿着系统 K 的 X 轴以速度 v 移动的系统 k 中，假设有一个点按以下公式运动

$$\xi = w_\xi \tau, \eta = w_\eta \tau, \zeta = 0,$$

这里 w_ξ 和 w_η 都代表常数。

求解：该点在相对于系统 K 的运动速度。

如果借助于第三节的变换公式，把 x,y,z,t 都代入该点的运动公式的话，我们可以得到

$$x = \frac{w_\xi + v}{1 + vw_\xi / c^2} t$$

$$y = \frac{\sqrt{\left(1 - v^2 / c^2\right)}}{1 + vw_\xi / c^2} w_\eta t$$

$$z = 0$$

所以速度的平行四边形法则，在我们的理论里，只在一阶近似的情况下成立。我们设定

$$V^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

$$w^2 = w_\xi{}^2 + w_\eta{}^2,$$

$$a = \tan^{-1} w_y / w_x$$

这里 a 可以看作是速度 v 和 w 之间的夹角。通过一个简单的计算，我们可以得到

$$V = \frac{\sqrt{\left[\left(v^2 + w^2 + 2vw\cos a\right) - \left(vw\sin a / c^2\right)^2\right]}}{1 + vw\cos a / c^2}$$

值得指出的是，v 和 w 在以上表达式中出现的形式是对称的。如果 w 也是沿着 X 轴的方向，那么我们就可以得出

$$V=\frac{v+w}{1+vw/c^2}$$

从此公式可以看出，当两个参加合成的速度都小于 c 的时候，合成的结果总是小于 c。因为，如果我们设 $v=c-k$ ， $w=c-\lambda$，其中 k 和 λ 都大于零并小于 c，于是

$$V=c\frac{2c-\kappa-\lambda}{2c-\kappa-\lambda+\kappa\lambda/c}<c$$

再进一步，光速 c 不会因为与一个小于光速的速度合成而改变。在这种情况下，我们得到

$$V=\frac{c+w}{1+w/c}=c$$

对于 v 和 w 方向相同的情况，我们也可以按照第三节的方式，通过双重变换来得到 V 的合成公式。如果除了第三节的系统 K 和 k 之外，我们再引进一个坐标系 k' ，该系统相对于 k 作平行运动，其原点在 X 轴的方向上以速度 w 移动，我们可以得到 x,y,z,t 和系统 k'的对应值之间的公式，这些公式与第三节公式的唯一不同处就是，把速度“v”都换成

$$\frac{v+w}{1+vw/c^2}\,;$$

由此可以看出，这种平行变换很自然地形成了一组。

根据我们的两个原则，我们已经得到了必要的运动定律，现在我们就着手把它应用到电动力学上。

[1] 该翻译只包括了与狭义相对论有关的部分。论文的第二节是关于电动力学的，与理解狭义相对论关系不大，所以在本译文中被省略了。