一个人在河水里的往返平均游速

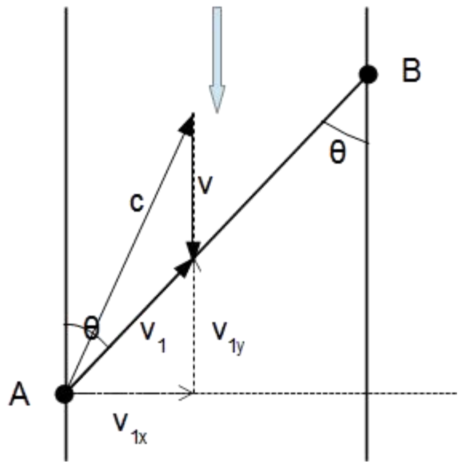
姜宝路

场景设置:

一个人正在河里游泳。他想从左岸的 A 点游到右岸的 B 点，然后再沿原路返回。已知他在静止的水里的游速是 c，而河水的流速是 v。

请问:

他的往返平均游速是多少？



解体思路：

为了抵消河水的影响，他实际游的方向必须有别于方向 AB，就像上图所标出的那样。

如果我们能得到他从 A 到 B 的速度 v_1 和他返回的速度 v_2，就可以用以下公式求出他的平均速度：

$$\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}=\frac{2}{v_{avg}},$$ 也就是，

$$v_{avg}=\frac{2v_1v_2}{v_1+v_2} \qquad \text{(I)}$$

所以解题的第一步就是设法求出 v_1 和 v_2 。

利用勾股定理，我们可以得到

$$c^2=v_{1x}^2+\left(v_{1y}+v\right)^2,$$

其中 $v_{1x}=v_1\sin\theta$， $v_{1y}=v_1\cos\theta$ 。

由此我们可以得出：

$$c^2=\left(v_1\sin\theta\right)^2+\left(v_1\cos\theta+v\right)^2 \qquad (1.1)$$

$$c^2=v_1^2\sin^2\theta+v_1^2\cos^2\theta+2v_1v\cos\theta+v^2$$

$$c^2=v_1^2\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)+2v_1v\cos\theta+v^2$$

$$v_1^2+2v\cos\theta\cdot v_1+v^2-c^2=0$$

$$v_1=\frac{-2v\cos\theta\pm\sqrt{\left(2v\cos\theta\right)^2-4\left(v^2-c^2\right)}}{2}$$

$$v_1=-v\cos\theta\pm\sqrt{\left(v\cos\theta\right)^2+\left(c^2-v^2\right)}$$

$$v_1=-v\cos\theta\pm\sqrt{\left(v^2\cos^2\theta-v^2\right)+c^2}$$

$$v_1=-v\cos\theta\pm\sqrt{c^2-v^2\sin^2\theta}$$

当 $v=0$ 时，$v_1=\pm c$ 。

因为当河水的流速为零时，他的游速应该完全不受影响，仍然是 c。所以这里应该取+号，于是

$$v_1=-v\cos\theta+\sqrt{c^2-v^2\sin^2\theta} \qquad (1.2)$$

对于他的返回速度，我们同样可以得出

$$c^2=\left(v_2\sin\theta\right)^2+\left(v_2\cos\theta-v\right)^2 \qquad (2.1)$$

把它与(1.1)相比较，可以看出它们的差别仅限于 v 之前的符号。

把公式 (1.2) 中的 v 换成 $-v$，我们就得到了 v_2:

$$v_2=v\cos\theta+\sqrt{c^2-v^2\sin^2\theta} \qquad (2.2)$$

把(1.2) 和 (2.2) 代入平均速度公式 (I) :

$$v_{avg}=2\frac{\left(-v\cos\theta+\sqrt{c^2-v^2\sin^2\theta}\right)\left(v\cos\theta+\sqrt{c^2-v^2\sin^2\theta}\right)}{\left(-v\cos\theta+\sqrt{c^2-v^2\sin^2\theta}\right)+\left(v\cos\theta+\sqrt{c^2-v^2\sin^2\theta}\right)}$$

$$v_{avg}=\frac{\left(c^2-v^2\sin^2\theta-v^2\cos^2\theta\right)}{\sqrt{c^2-v^2\sin^2\theta}}$$

$$v_{avg} = \frac{(c^2 - v^2)}{\sqrt{c^2 - v^2 \sin^2\theta}}$$

把 $\gamma = v/c$ 代入以上公式，就有了

$$v_{avg} = c \cdot \frac{(1-\gamma^2)}{\sqrt{1-\gamma^2 \sin^2\theta}} \qquad \text{(II)}$$

这就是问题的解。

因为

$$\sqrt{1-\gamma^2 \sin^2\theta} \geq \sqrt{1-\gamma^2},$$

所以

$$v_{avg} \leq c \cdot \frac{(1-\gamma^2)}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \text{or} \quad v_{avg} \leq c \cdot \sqrt{(1-\gamma^2)} \qquad \text{(III)}$$

由此可以得出以下结论:

- 一个人在流水中的往返平均游速总是小于他在静水中的游速。
- 当实际游向与水流方向平行的时候，水流的影响最大；当实际游向与水流方向垂直的时候，水流的影响最小。
- 公式在 $v >= c$ (or $\gamma \geq 1$) 的时候没有意义。在这种情况下，一个人根本没有可能游去上游，所以我们也无法得到一个往返平均速度。